Одна Характеризация Модели $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$

Акоп, Оганесян

Российско-Армянский (Славянский) университет
г. Ереван, Армения

эл. почта: Hovhannisyan@list.ru

АННОТАЦИЯ

В заметке доказано, что показательная функция распределения и геометрическое распределение в качестве стационарных для времени ожидания и числа вызовов в рамках модели $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$ при дисциплине FIFO возникают только и только при показательной функции распределения времени обслуживания.

Ключевые слова.

Модель $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$, число вызовов в модели, время ожидания.

1^0. В настоящей заметке рассматривается модель $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$ с параметром $a>0$ пуассоновского входящего потока и с общей функцией распределения (ФР) B, $B(+0)=0$ времен обслуживания вызовов при дисциплине FIFO.

Необходимым и достаточным условием существования стационарных времени ожидания начала обслуживания w и числа вызовов в модели ξ является следующее условие, $\rho_1 = a\beta_1 < 1$, где $\beta_1 = \int_0^\infty x dB(x)$. Обозначим через $W(x)$, $x \ge 0$ ФР случайной величины (СВ) w и через $\{p_n\}_0^\infty$ распределение дискретной СВ ξ. Тогда

$$\omega(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dW(x) = \frac{(1-\rho_1)s}{s-a+a\beta(s)}, \quad s \ge 0, \qquad (1)$$

где $\beta(s) = \int_{0-}^{\infty} e^{-sx} dB(x)$ и

$$P(z) = \sum_{n\ge 0} p_n z^n = \frac{(1-\rho_1)(z-1)\cdot\beta(a-az)}{z-\beta(a-az)}, \quad 0 \le z \le 1. \qquad (2)$$

В частности, в модели $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$, т.е. когда

$$B(x) = \begin{cases} 1-\exp(-bx), & x \ge 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \qquad b = (1/\beta_1) > 0, \qquad (3)$$

имеем

$$W(x) = 1-\rho_1\cdot\exp\left(-\frac{a(1-\rho_1)}{\rho_1}x\right), \quad x \ge 0, \qquad (4)$$

$$p_n = (1-\rho_1)\cdot\rho_1^n, \quad n \ge 0. \qquad (5)$$

Данная информация имеется, например, в [1].

Наша *цель* заключается в установлении *обратного* к (3)-(5) утверждения.

Теорема. *Дана модель* $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$ *с дисциплиной FIFO. Тогда:*

(а) Для справедливости представления

$$W(x) = 1-e\cdot\exp(-dx), \ x \ge 0, \ e \in (0,1), \ d > 0, \qquad (6)$$

необходимо и достаточно выполнение (3). При этом, $e = \rho_1$, $d = \dfrac{a(1-\rho_1)}{\rho_1}$;

(б) Для справедливости представления

$$p_n = (1-q_1)\cdot q_1^n, \quad n \ge 0, \qquad (7)$$

необходимо и достаточно выполнение (3). При этом, $q = \rho_1$.

Следует доказать лишь *необходимость* в утверждениях (а) и (б) Теоремы.

Отметим, что из (1) и (2) находятся константы e и q в (6) и (7):

$$1-\rho_1 = \omega(+\infty) = W(+0) = 1-e, \text{ т.е. } e = \rho_1,$$
$$1-\rho_1 = P(0) = p_0 = 1-q, \text{ т.е } q = \rho_1.$$

Приступим к доказательству *необходимости*.

2^0. (а) Пусть в модели $\mathrm{M}\,|\,\mathrm{G}\,|\,1\,|\,\infty$ при дисциплине FIFO справедливо (6) с $e = \rho_1$.

Так как имеет место формула (1), то $W_1(x) = \dfrac{(W(x)-(1-\rho_1))}{\rho_1}$, $x \ge 0$ есть ФР, не имеющая скачка в нуле. Из (1) несложными преобразованиями получаем

$$\omega_1(s) = \frac{(1-\rho_1)\breve{\beta}(s)}{1-\rho_1\cdot\breve{\beta}(s)}, \quad s \ge 0, \qquad (8)$$

$$\begin{cases} \breve{\beta}(s) = \dfrac{1-\beta(s)}{s\beta_1} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx} d\breve{B}(x), \\ \breve{B}(x) = \dfrac{1}{\beta_1}\displaystyle\int_0^x (1-B(u))du. \end{cases} \qquad (9)$$

Очевидно, $\breve{B}(x)$, $\breve{B}(+0) = 0$, есть ФР.

Нужно доказать, что из формулы

$$W(x) = 1-e\cdot\exp(-dx), \ x \ge 0, \ d > 0, \qquad (10)$$

найденной из (6) с $e = \rho_1$, следует (3). Согласно (10),

$$\omega_1(s) = \frac{(1/d)}{s+(1/d)}, \quad s \ge 0. \qquad (11)$$

Приравнивая имеющиеся два представления (8) и (11) для $\omega_1(s)$, после преобразований, получаем

$$\begin{cases} \breve{\beta}(s) = \dfrac{(1/f)}{s + (1/f)}, \quad s \ge 0, \\ \text{или} \\ \breve{B}(x) = 1 - \exp(-x/f), \quad x \ge 0, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$f = d \cdot (1 - \rho_1). \tag{13}$$

Из равенств (см. (9) и (12)) следует

$$\breve{\beta}_1 = \int_0^\infty x dB(x) = \frac{\beta_2}{2\beta_1} = f \text{ , где } \beta_2 = \int_0^\infty x^2 dB(x).$$

Поэтому $\beta(s) = \dfrac{\left(2\beta_1/\beta_2\right)}{s + \left(2\beta_1/\beta_2\right)}, \quad s \ge 0,$ что дает

$$\beta(s) = \frac{\left(2\beta_1/\beta_2\right) + s\left(1 - \left(2\beta_1^2/\beta_2\right)\right)}{s + \left(2\beta_1/\beta_2\right)}, \quad s \ge 0, \tag{14}$$

Согласно (14) и условию $B(+0) = 0$, заключаем

$$0 = B(+0) = \beta(+\infty) = 1 - (2\beta_1^2/\beta_2) \text{ , т.е. } \beta_2 = 2\beta_1^2,$$

откуда и из (14) получаем (3).

3^0. (б) Пусть в модели $\mathrm{M} \mid \mathrm{G} \mid 1 \mid \infty$ при дисциплине FIFO справедливо (7) с $q = \rho_1$, т.е. верно (5). Нужно доказать, что из (5) следует (3). С одной стороны, согласно (2) и (9), $P(z)$ можно записать в виде

$$P(z) = \frac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 \breve{\beta}(a - az)} \beta(a - az), \quad 0 \le z \le 1,$$

а, с другой стороны, из (5) выводим

$P(z) = \sum_{n \ge 0} p_n z^n = \dfrac{1 - \rho_1}{1 - \rho_1 z}, \quad 0 \le z \le 1.$ Приравнивая эти два представления для $P(z)$, после несложных преобразований, получаем

$$\rho_1 \frac{\breve{\beta}(a - az)}{1 - \rho_1 z} = 1 - \beta(a - az), \text{ или}$$

$$\frac{\breve{\beta}(a - az) - z}{\breve{\beta}(a - az)} = (1 - \rho_1)(1 - z),$$

откуда выводим

$$\breve{\beta}(a - az) = \frac{1}{\rho + 1 - \rho_1 z} = \frac{(1/\beta_1)}{a(1 - z) + (1/\beta_1)}, \quad 0 \le z \le 1.$$

Следовательно, $\breve{\beta}(s) = \dfrac{(1/\beta_1)}{s + (1/\beta_1)}, \; s \in [0, a].$ Последняя формула аналитически продол- жается с сохранением вида на область $\{s : \mathrm{Re}\, s \ge 0\}$, откуда вытекает (3). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Матвеев В.Ф., Ушаков В.Г. Системы массового обслуживания. – М.: МГУ, 1984, 239 с.